

## MAGNETISMUS

# Magnetkugeln – ein 10-Euro-Labor

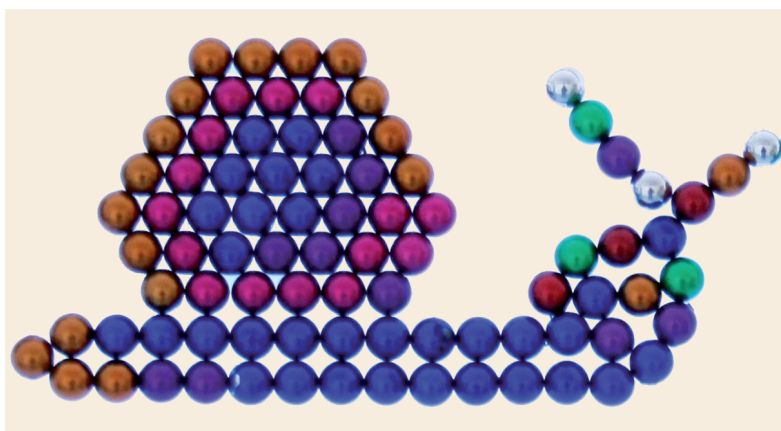
Preiswerte Neodym-Magnetkugeln eröffnen einen erfrischend einfachen Zugang, um Vielteilchen-Wechselwirkungen zu illustrieren.

Johannes Schönke, Wolfgang Schöpf und Ingo Rehberg

Magnetkugeln sind ein inspirierendes physikalisches Spielzeug. Mit ihnen kann man nicht nur chemische, physikalische und mathematische Fragestellungen illustrieren, sondern auch der Kreativität auf die Sprünge helfen. So ist es von der Frage nach dem magnetischen Grundzustand eines mühevoll zusammengesetzten Würfelpuzzles nur ein kleiner Schritt bis zur Erfindung von Magnetkupplungen ohne störende Rastmomente.

Gegen Mittag werden wir an einen schwarzen Berg kommen ... das Schiff wird zerschellen und jeder Nagel wird sich am Berge befestigen, denn der erhabene Gott hat dem Magnetgesteine die Kraft verliehen, das Eisen anzuziehen.“ Die Beschreibung des Magnetbergs aus „Tausendundeine Nacht“ belegt, dass die Menschheit schon seit langem von dieser Spielart einer Dipol-Dipol-Wechselwirkung fasziniert ist. Dies steht im Einklang mit der durch Didaktiker vertretenen Ansicht, dass sich der Ferromagnetismus besonders gut für den Sachunterricht in der Grundschule eignet<sup>1)</sup> – dem möchten wir nicht widersprechen. Die technische Bedeutung des Magnetismus kann man schließlich kaum überschätzen, wenn wir uns verdeutlichen, dass ein großer Teil des kollektiven Gedächtnisses der Menschheit magnetisch gespeichert und abgerufen wird. Die physikalischen Eigenschaften der Vielteilchen-Wechselwirkung von Magneten wurden mit Hilfe der kommerziell massenhaft und preiswert verfügbaren Neodym-Kugeln auch für spielerische Forschungen zugänglich. In diesem Artikel wollen wir einige solcher Experimente und das entsprechende theoretische Modell zusammenfassend vorstellen.

Neodym-Magnet ist die Kurzbezeichnung für eine im Sinterverfahren hergestellte Legierung aus Eisen, Neodym und Bor ( $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ ), die General Motors und Sumitomo Special Metal 1982 entwickelt haben und die seit etwa zwei Jahrzehnten als günstige Massenware erhältlich ist. Als Dauermagnet ist dieses Material stärker als herkömmliche Magnete aus Eisenlegierungen: Die Remanenz von 1 bis 1,5 T ist zwar nicht größer als bei anderen magnetischen Materialien. Aber die Koerzitivfeldstärke von etwa  $10^6$  A/m liegt um zwei bis vier Größenordnungen über der von Vergleichsmaterialien, sodass sie durch äußere Magnetfelder ihre Stärke praktisch nicht verlieren können. Die magnetische



Magnetkugeln laden zum Spielen ein und eröffnen einen anschaulichen experimentellen Zugang zur Vielteilchenwechselwirkung.

Wechselwirkung ist deutlich größer als ihr Gewicht: So zerreißt eine meterlange Kette (Abb. 1) nicht unter ihrem Eigengewicht, und selbst ein aufrecht stehender Kugelturm bleibt bis zu einer gewissen Höhe gerade, bevor er sich unter seinem Gewicht verbiegt (Abb. 7).

Zum spielerischen Aspekt seien zwei Warnungen vorangestellt. Die Haltekraft zwischen zwei Kugeln skaliert mit dem Quadrat des Durchmessers. Dies führt dazu, dass das Hantieren mit zentimetergroßen Kugeln aufgrund der unterschätzten Anziehungskraft häufig mit schmerzhaften Erfahrungen und blauen Fingern verbunden ist. Kugeln im Millimeterbereich sind in diesem Sinne zwar harmlos, aber dennoch in einigen Ländern wegen ihrer Gefährlichkeit für Kleinkinder verboten: Das Verschlucken einzelner Kugeln – welche sich im Verdauungstrakt immer noch gegenseitig anziehen – kann zu lebensgefährlichen Komplikationen im Darm führen.

1) <http://bit.ly/1RQINBS>

## KOMPAKT

- Magnetische Kugeln dienen als günstig verfügbares Anschauungsmaterial für physikalische Wechselwirkungen.
- Die mathematische Modellierung erfolgt durch die Beschränkung auf reine Dipol-Dipol-Wechselwirkung.
- Die Frage nach der stationären Anordnung von acht Kugeln in den Ecken eines Würfels – einem elementaren Baustein dreidimensionaler Strukturen – führt zu 9536 Gleichgewichtszuständen.
- Der Grundzustand des Acht-Kugel-Würfels stellt als Kontinuum eine magnetische Kupplung dar.

Dr. Johannes Schönke, Okinawa Institute of Science and Technology, Graduate University, Japan; Dr. Wolfgang Schöpf, Prof. Dr. Ingo Rehberg, Physikalisches Institut der Universität Bayreuth, 95440 Bayreuth

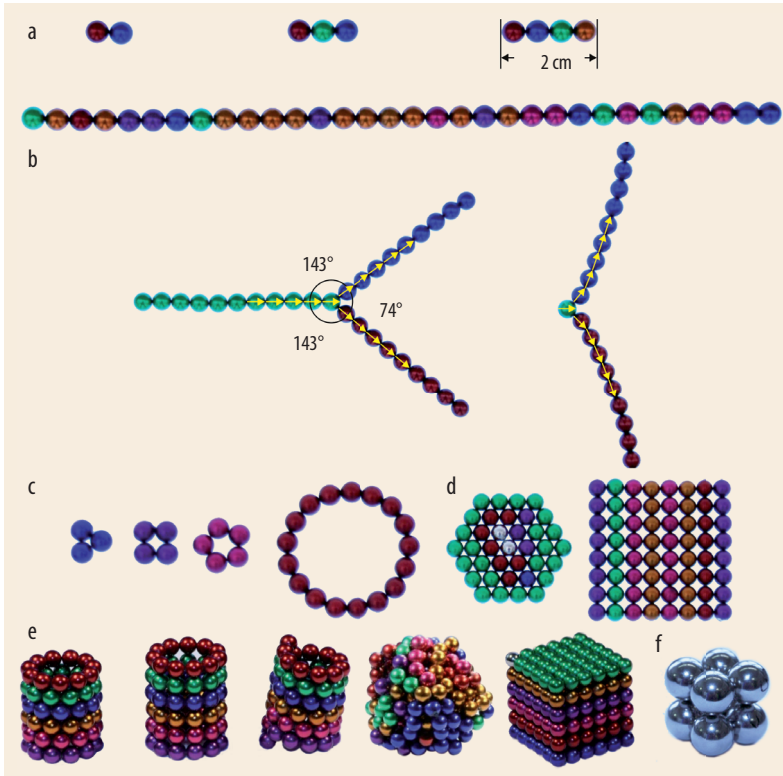


Abb. 1 Aus den Magnetkugeln entsteht spielerisch eine Vielzahl eindimensionaler (a, b), zweidimensionaler (c, d) und dreidimensionaler Figuren (e, f).

2) Weitere schöne Beispiele finden sich unter:  
<http://bit.ly/1WZLN7b>  
<http://bit.ly/20NIOQ2>  
<http://bit.ly/1Ta4hwY>  
<http://bit.ly/1o66YEi>  
<http://bit.ly/23Y1Cwv>

Warum verleiten die Kugeln überhaupt zum Spielen? Auch Erwachsene stellen rasch fest, dass sich die Kugeln durch ihre außerordentlich starke Wechselwirkung zu einer Vielzahl von Strukturen zusammensetzen lassen und es eine Fülle von faszinierenden stabilen geometrischen Anordnungen gibt (Abb. 1). Das reicht von einfachen eindimensionalen Ketten über zweidimensionale Ringe, Doppelringe und Hexagone bis hin zu komplizierten dreidimensionalen Figuren und komplexen Gebilden wie einer Sierpinsky-Pyrami-

de, einem Paradebeispiel für fraktale Strukturen.<sup>2)</sup> Als relativ einfaches Beispiel erscheint dagegen der Würfel (Abb. 1f), auf den wir im Abschnitt über frustrierte Zustände noch genauer eingehen werden.

Eine besonders hervorhebenswerte Kuriosität ist das „Y“ (Abb. 1b), das als elementarer Bestandteil eines magnetischen Netzwerkes angesehen werden kann. Die drei Äste sind nicht gleichberechtigt. So sind zwei der Winkel gleich, während der dritte kleiner ist – genauer: 143°, 143°, 74° [1]. Entfernt man den ausgezeichneten Ast, so bleiben die Winkel erhalten. Man hat dann eine Kette, bei der sich an dieser Gabelung die Dipolorientierung ändert: Die Verbindungskugel behält die Orientierung des entfernten Astes, weshalb die Autoren in [1] von einer „ghost junction“ sprechen. Die Feldlinien im Bereich dieser Gabelung erinnern an einen Monopol, und man beobachtet entsprechend auch anziehende und abstoßende, Coulomb-artige Wechselwirkungen zwischen solchen Objekten, welche an Spin-Eis erinnern [1].

Eine andere Faszination beim Spielen rührt daher, dass die Magnete aufgrund ihrer gegenseitigen Anziehung Klumpen bilden, die in der Hand ähnlich einem Knetgummi plastisch verformbar sind. Diese Plastizität einer Masse aus ein paar hundert Magnetkugeln belegt, dass es für eine gegebene Anzahl von Kugeln eine Vielzahl von stabilen Zuständen gibt – stabil in dem Sinne, dass die Struktur erhalten bleibt, solange keine äußere Kraft einwirkt. Sie befindet sich also in einem lokalen Energieminimum. Es stellt sich nun die Frage:

### Was ist eigentlich der Grundzustand?

Diese Frage nach dem absoluten Energieminimum lässt sich wegen der mit der Teilchenzahl exponentiell anwachsenden Komplexität nur für kleine Systeme mit

## DIPOL-DIPOL-WECHSELWIRKUNG UND WECHSELWIRKUNGSENERGIE

Magnetkugeln wollen wir wie einzelne Punktdipole behandeln, weil das Feld im Außenraum einer homogen magnetisierten Kugel genau dem eines Punktdipols im Zentrum der Kugel entspricht [8]. Für  $N$  Punkte mit den Dipolmomenten  $\vec{m}_i$ , die mit den paarweisen Abstandsvektoren  $\vec{r}_{i,j}$  mit dem Betrag  $r_{i,j} = |\vec{r}_{i,j}|$  irgendwie im Raum angeordnet sind (Abb. für  $N = 2$ ), ist die potentielle Energie aus wechselwirkenden Dipolen durch

$$U_N = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i < j}^N \frac{\vec{m}_i \cdot \vec{m}_j r_{i,j}^2 - 3(\vec{m}_i \cdot \vec{r}_{i,j})(\vec{m}_j \cdot \vec{r}_{i,j})}{r_{i,j}^5} \quad (1)$$

gegeben [8]. In der Summe gibt es keine doppelte Zählung der Wechselwirkungen. Außerdem ist die Nebenbedingung  $r_{i,j} \geq d$  zu erfüllen, d. h. die Kugeln durchdringen sich nicht, wenn  $d$  ihr Durchmesser ist.

Sind alle Magnete gleich stark, so ist  $|\vec{m}_i| = |\vec{m}_j| = m$ . Definiert man Einheitsvektoren  $\hat{r}_{i,j}$  und  $\hat{m}_i$  mit  $\vec{r}_{i,j} = r_{i,j} \hat{r}_{i,j}$  und  $\vec{m}_i = m \hat{m}_i$  und verwendet die Wechselwirkungsenergie  $U_0 = \frac{\mu_0 m^2}{4\pi d^3}$

für zwei parallele Dipole im Abstand  $d$  (zwei Kugeln in Kontakt), folgt die dimensionslose Energie pro Dipol

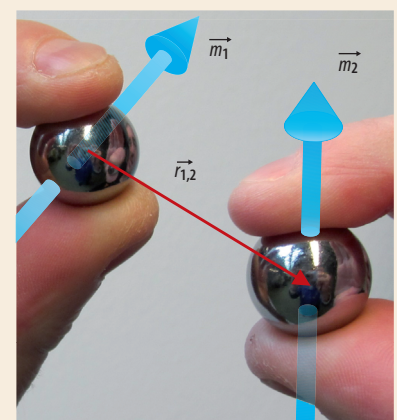
$$u_N = \frac{U_N}{NU_0} = \frac{1}{N} \sum_{i < j}^N \frac{(\hat{m}_i \cdot \hat{m}_j - 3(\hat{m}_i \cdot \hat{r}_{i,j})(\hat{m}_j \cdot \hat{r}_{i,j}))}{(r_{i,j}/d)^3} \quad (2)$$

Unter der Summe stehen nur noch rein geometrische Größen. Die Gleichgewichtszustände in diesem  $5N$ -dimensionalen Potentialgebirge sind durch Punkte mit verschwindendem Gradienten gegeben – stabile Zustände durch lokale Minima und der Grundzustand durch das globale Minimum. Nur für einfache Konfigurationen wie lineare Kette oder Ring ist der Grundzustand analytisch berechenbar.

Bei der linearen Kette ist es am günstigsten, wenn alle Dipole in die gleiche Richtung parallel zur Kette zeigen:

$$u_N^{\text{Kette}} = -\frac{2}{N} \sum_{i < j}^N \frac{1}{(j-i)^3} \quad (3)$$

Bei einem Kreisring sind im Gleichgewichtszustand alle Dipole in Richtung der Tangente entlang des Kreises ausgerichtet. Dann gilt:



$$u_N^{\text{Ring}} = -\frac{1}{4} \sin^3(\pi/N) \sum_{k=1}^{N-1} \frac{3 + \cos(2\pi k/N)}{\sin^3(\pi k/N)} \quad (4)$$

Im Grenzfalle  $N \rightarrow \infty$  sind die Energien für Kette und Ring gleich und betragen  $u_\infty^{\text{Kette}} = u_\infty^{\text{Ring}} = -2 \zeta(3) \approx -2,404$  mit der Riemannschen Zetafunktion  $\zeta$ .

vertretbarem Rechenaufwand beantworten: Hätte Pythagoras die Rechenleistung von tausend heutigen Supercomputern zur Verfügung gehabt und ein entsprechendes (nicht-statistisches) Programm für uns gestartet, bestünde die Frucht dieser Rechnung am heutigen Tage erst aus den Gleichgewichtszuständen von etwa zwanzig Teilchen (bei ortsfesten Kugeln). Die Zahl der Gleichgewichtskonfigurationen kennen wir nicht, man kann aber zeigen, dass sie kleiner als  $2^{3 \cdot 20}$  sein muss [2]. Bei der mathematischen Modellierung beschränken wir uns auf die Dipol-Dipol-Wechselwirkungen zwischen den Kugeln. Die gesamte potentielle Energie lässt sich mit Gl. (1) und (2) für jede beliebige Kugelanzahl und Konfiguration angeben (Infokasten), wobei die Nebenbedingung zu beachten ist, dass die Kugeln sich nicht gegenseitig durchdringen. Dieser Ausdruck muss minimiert werden, wobei man es mit fünf Variablen pro Magnet zu tun hat: drei Ortskoordinaten für das Dipolzentrum und zwei Winkel für die Richtung. Für kleine  $N$  kann dies teilweise analytisch geschehen, für größere  $N$  nur noch numerisch, z. B. mit Hilfe von Optimierungsprozeduren oder Monte-Carlo-Simulationen [3, 4].

Beginnen wir mit dem elementarsten Problem: Zwei Neodym-Kugeln ziehen sich gegenseitig an und bilden ein Dimer, die kürzest mögliche Kette (Abb. 1a). Durch Anfügen weiterer Kugeln kann man die Kette beliebig erweitern. Intuitiv ist klar, dass alle Dipole in die gleiche Richtung zeigen, sodass die Energie durch Gl. (3) gegeben ist. Was passiert nun aber, wenn man die stabile Kette verbiegt? Bis zu einem gewissen Krümmungsradius steigt die Energie an, um dann wieder abzusinken, bis die Kugeln schließlich einen (stabilen) Kreisring bilden (Abb. 1c): Also gibt es eine Energiebarriere zwischen Kette und Ring [1]. Auch für einen Kreisring ist es möglich, die Gesamtenergie mit Gl. (4) präzise anzugeben, wenn man davon ausgeht, dass die Dipolrichtung immer tangential zum Kreis ist.

Nun stellt sich heraus, dass bereits ab  $N = 4$  der Ring energetisch günstiger ist als die lineare Kette [3]. Die mittleren Grundzustandsenergien lassen sich für wachsende Kugelanzahl berechnen und für verschiedene Geometrien vergleichen (Abb. 2). Geht die Anzahl der Kugeln  $N$  gegen unendlich, nähern sich die Energien für Kette und Ring an (Infokasten). Da wir uns im nächsten Abschnitt mit Würfeln beschäftigen wollen, ist der Vergleich von Quadraten und Würfeln interessant. Für mehr als hundert Kugeln ist deren Grundzustandsenergie immer kleiner als die von Ketten und Ringen. Interpoliert man zwischen den dis-

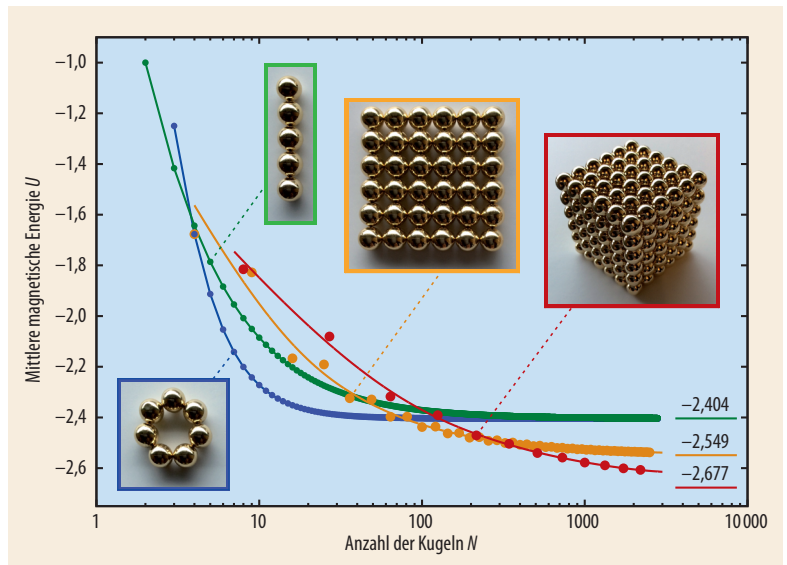


Abb. 2 Für Ketten (grün), Ringe (blau), Quadrate (orange) und Würfel (rot) ergeben sich abhängig von der Kugelanzahl  $N$  verschiedene mittlere magnetische Energien  $U$ . Die diskreten Werte sind zur Orientierung mit kubischen Spline-Fits verbunden. Ab  $N = 4$  sind Ringe energetisch günstiger als Ketten. Bei mehr als hundert Kugeln besitzen Quadrate die geringsten Energien; ab etwa 500 Kugeln sind es die Würfel. Die Grenzwerte für  $N \rightarrow \infty$  sind angegeben.

kreten Kugelanzahlen für Quadrate und Würfel durch einen kubischen Spline-Fit, so liegen ihre minimalen Energien abwechselnd unterhalb (gerade Kugelanzahl) und oberhalb (ungerade Kugelanzahl) des Fits, weil bei einem symmetrischen Aufbau mit ungerader Kugelanzahl die zentrale Kugel ein verschwindendes Dipolmoment verhindert. Für große Teilchenzahlen ist eine dreidimensionale Anordnung günstiger als eine zweidimensionale – ein Argument, das zum Verständnis der Selbstmontage magnetischer Nanowürfel wichtig ist [5].

Andererseits ist bereits in zwei Dimensionen die Frage nach dem Grundzustand sehr facettenreich: So kann man statt immer größerer Ringe auch Doppel- und Mehrfachringe betrachten (Abb. 3). Doppelringe sind ab  $N = 18$  energetisch günstiger als einfache Ringe und werden ab  $N = 29$  wiederum von Mehrfachringen unterboten. Interessant sind die Hexagone mit  $N = 36$  und  $N = 37$ : Hier ist es energetisch etwas günstiger, den Platz in der Mitte freizulassen, da dann das gesamte magnetische Moment gerade Null ist. Ähnliches gilt auch für andere Hexagone, z. B. bei  $N = 18$  oder  $N = 168$  [3].

Beim Ausweichen in drei Dimensionen zeigt sich, dass bereits ab  $N = 14$  röhrenartige Strukturen (Abb. 1e), also gestapelte Ringe, energetisch günstiger werden

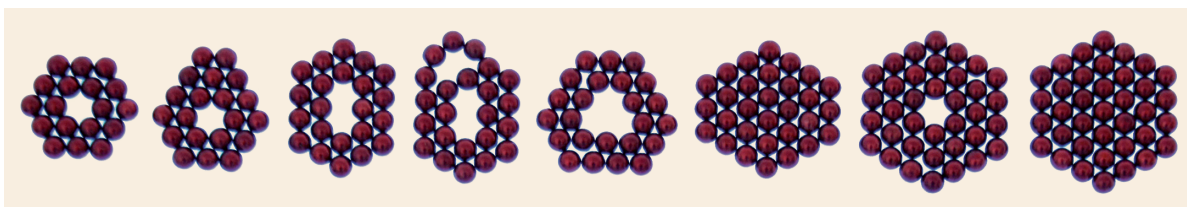


Abb. 3 Ab  $N = 18$  (links) sind Doppelringe energetisch günstiger als einfache Ringe. Bei hexagonaler Anordnung hängt die Energie stark von der Symmetrie ab: Das magnetische Moment des Hexagons mit  $N = 36$  ist gerade Null, sodass diese Anordnung eine kleinere Energie besitzt als das Hexagon mit  $N = 37$ , bei dem der mittlere Platz besetzt ist (rechts).



3) <http://bit.ly/1Ub85yj>

als einfache Ringe [3]. Die Frage nach dem absoluten Energieminimum für eine bestimmte Kugelanzahl  $N$  indes wird auch dadurch nicht beantwortet. So sind ab  $N = 767$  merkwürdige stabartige Gebilde mit rechteckigem Querschnitt energetisch günstiger als die Röhren [6]. Andererseits suggeriert die oben erwähnte plastische Verformbarkeit bereits, dass eine dichteste Kugelpackung energetisch vorteilhaft sein könnte, und es zeigt sich tatsächlich, dass diese für  $N > 1300$  wiederum die Röhren unterbietet [7].

Wir lassen mit diesen Andeutungen die Frage nach einem absoluten Energieminimum als offenes Problem bestehen und wenden uns einem für praktische Anwendungen vielleicht noch relevanteren Themenkreis zu, nämlich der Frage nach der Orientierung von Dipolen in magnetischen Clustern.

### Frustrierte Zustände und ...

Zwar ist für  $N = 8$  der Grundzustand durch den Ring gegeben (Abb. 2), aber experimentell lassen sich mit acht Kugeln bereits verschiedene metastabile Zustände konstruieren. Einige davon mögen nur aufgrund von Haftreibung zwischen den Kugeln stabil sein, andere blieben auch nach dem idealisierten mathematischen Modell (Infokasten) in ihrer Anordnung. Dies gilt insbesondere für den Würfel mit einer Kugel an jeder Ecke (Abb. 1f). Hier haben wir eine etwas reduzierte Fragestellung: Die Positionen der Dipole sind fest vorgegeben, während ihre Orientierung im Raum frei ist. Für ein System dieser Größe lässt sich die Frage nach den möglichen Gleichgewichtszuständen heute mit vertretbarem Rechenaufwand beantworten – im Jahr 2000 hätte sich ein Supercomputer einige Wochen geplagt.

Die 16-dimensionale Energielandschaft des Würfels enthält 9536 diskrete Gleichgewichtspunkte, die alle instabil sind und sich in 183 Familien unterschiedlicher Energie ordnen lassen [2]. Die Mitglieder einer Familie sind identisch bis auf Drehungen und Spiegelungen, welche aus den 48 Elementen der Symmetriegruppe des Würfels stammen. Außerdem gilt immer die Polaritätssymmetrie: Vertauschen wir bei allen Dipolen gleichzeitig Nord- und Südpol, ändert sich an der

Diskrete Zustände und Energiefamilien				
Anordnung	$N$	$S_{\max} = 2^{3N}$	$S$	$F$
Linie	2	64	8	4
Dreieck	3	512	48	8
Tetraeder	4	4 096	116	10
Oktaeder	6	262 144	1 156	43
Würfel	8	16 777 216	9 536	183

Bei einer vorgegebenen, regelmäßigen Anordnung ergeben sich für  $N$  Magnetkugeln maximal  $S_{\max}$  diskrete (i. Allg. komplexe) Zustände,  $S$  reelle Gleichgewichtszustände und  $F$  Energiefamilien.

Energie und Stabilität der Konfiguration nichts. Somit kann eine Energiefamilie bis zu 96 Mitglieder haben.

Wenn nun alle diskreten Gleichgewichtsorientierungen im Würfel instabil sind, was ist dann der Grundzustand? Der einzig stabile Zustand stellt eine extreme Form magnetischer Frustration dar, nämlich ein Kontinuum eines energetisch unendlich entarteten Gleichgewichts [2]. Somit ist der Dipolwürfel eine vollkommen glatte magnetische Kupplung. Die Schwingungsperiode eines gestörten Zustandes der Magnetkugeln divergiert mit Annäherung an die exakte Würfelgeometrie – es handelt sich demnach um eine Goldstone-Mode. In diesem Kontinuum sind die Dipole um die jeweilige Volumendiagonale des Würfels drehbar, sofern sie eine bestimmte Symmetrie zueinander einhalten (Abb. 4a). Bisher ist keine weitere Anordnung von endlich vielen Dipolen mit vollkommen freier Orientierung bekannt, welche ebenfalls einen stabilen kontinuierlichen Zustand besitzt [2]. Sämtliche Gleichgewichte des Dipolwürfels lassen sich online interaktiv erkunden.<sup>3)</sup>

Wenn der Dipolwürfel schon fast 10 000 diskrete Gleichgewichtszustände besitzt, können wir davon ausgehen, dass diese Anzahl bei mehr als acht Dipolen schnell unüberschaubar wird. In der Tat wächst die Zahl von möglichen diskreten Zuständen exponentiell mit der Zahl  $N$  der Dipole: Die bis jetzt beste Abschätzung einer oberen Schranke beträgt  $S_{\max} = 2^{3N}$  [2]. In regelmäßigen Anordnungen mit bis zu acht Dipolen ist die Anzahl reeller Gleichgewichtszustände aber wesentlich geringer (Tabelle). Der Grundzustand für  $N < 8$  ist diskret und stellt den einzig stabilen Zustand dar. Allerdings gibt es im Tetraeder und auch im Oktaeder Kontinua, die aber alle instabil sind [2].

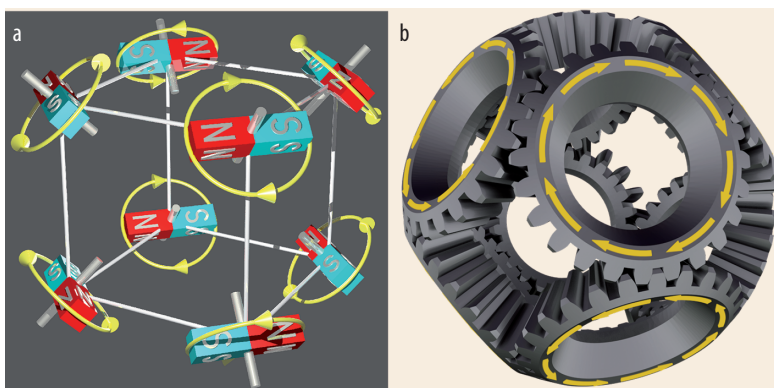


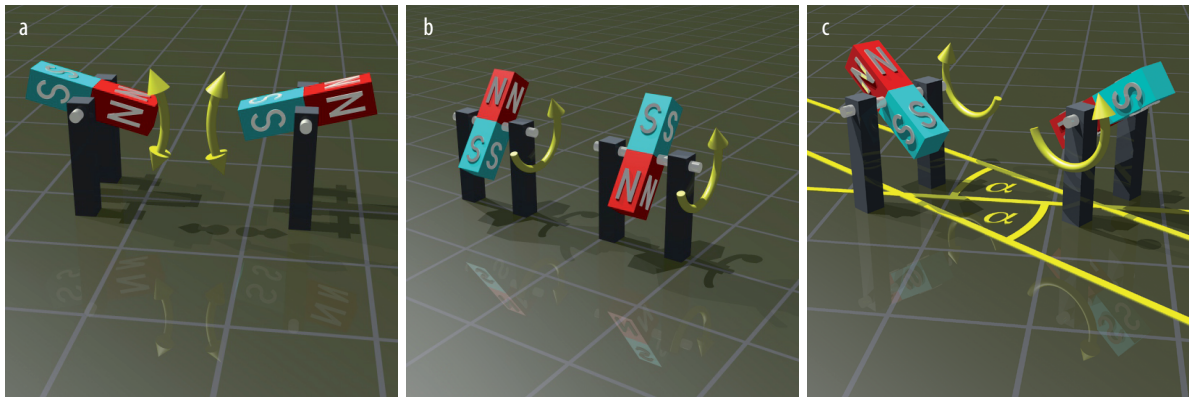
Abb. 4 Stabmagnete veranschaulichen die Dipolorientierungen der acht homogen magnetisierten Kugeln auf den Eck-

punkten des Würfels (a). Kegelnzahnäder führen die gleichen Drehungen aus wie die Dipole im Grundzustand (b).

### ... magnetische Kupplungen

Ein kontinuierlicher Zustand stellt eine magnetische Kupplung dar, die Drehmomente mit einer konstanten, nichtfluktuierenden Kraft übertragen kann, was Ingenieure „rastmomentenfrei“ nennen. Rotieren wir einen der Dipole in der Würfelanordnung, rotieren alle anderen sieben mit. Der Drehsinn der Dipole im Würfelkontinuum entspricht genau dem Drehsinn von acht Kegelnzahnädern an den Ecken des Würfels mit denselben Rotationsachsen, wobei jedes Zahnrad mit seinen drei Kantennachbarn verzahnt ist (Abb. 4b). Die Frage, ob es noch weitere solche perfekt verzahnten





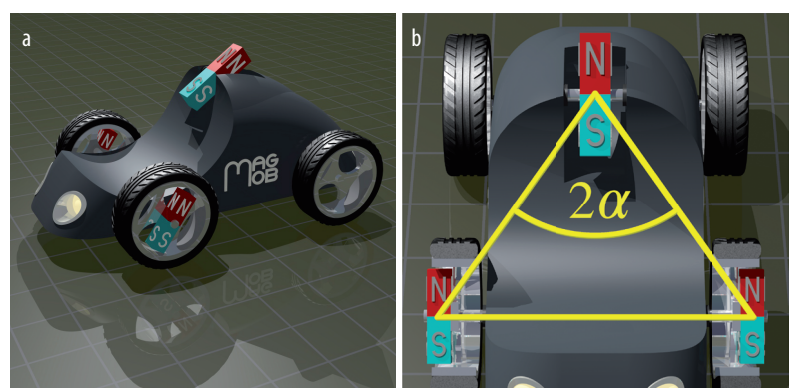
**Abb. 5** Zwei interagierende Dipole mit jeweils fester Rotationsachse lassen sich so anordnen, dass keine freie Rotation möglich ist, wenn sie aus der Grundzustandslage ausgelenkt werden (a). Im trivialen Kontinuum rotieren die Dipole dann gleichsinnig (b). Eine gegenseitige Rotation ergibt sich für ein nichttriviales Kontinuum (c).

magnetischen Kupplungen gibt, ist äquivalent zur Frage nach weiteren stabilen kontinuierlichen Zuständen. Zwar ist der Würfel bis jetzt die einzig bekannte endliche Anordnung dieser Art. Wenn man jedoch zusätzlich die Drehachse jedes Dipols vorgibt, können die Dipole nicht mehr in ihre Gleichgewichtskonfiguration fallen, sodass sich daraus neue Möglichkeiten ergeben, magnetische Kupplungen zu erzeugen.

So lässt sich für den Fall zweier interagierender Dipole eine einparametrische Familie von möglichen Rotationsachsen angeben, die einen kontinuierlichen Grundzustand erzeugt [10]. Anhand von drei Beispielen wollen wir diese fundamentale Eigenschaft näher erläutern: Eine Anordnung mit diskrettem Grundzustand besteht aus zwei Dipolen, deren Rotationsachsen parallel zueinander und orthogonal zur Verbindungslinie der beiden Dipole sind (Abb. 5a). Im Grundzustand sind die Dipole mit gleicher Orientierung entlang der Verbindungslinie ausgerichtet. Dieser Zustand ist diskret und nicht kontinuierlich – möchten wir einen Dipol aus seiner Position auslenken, müssen wir Energie aufwenden. Geben wir ihn aus seiner ausgelenkten Position wieder frei, vollführt das System eine Oszillation um den Grundzustand. Dabei schwingen die beiden Dipole gegenphasig zueinander. Für ein triviales Kontinuum sind beide Rotationsachsen koaxial entlang der Verbindungslinie ausgerichtet, sodass die Dipole im Grundzustand antiparallel zueinander sind (Abb. 5b). Diese Anordnung findet als Magnetrührer Verwendung, besitzt per Konstruktion Rotationssymmetrie und ist daher eine triviale Realisierung einer rastmomentenfreien Kupplung. Für ein nichttriviales Kontinuum sind die Rotationsachsen wiederum parallel, jedoch nicht koaxial ausgerichtet (Abb. 5c). Der eingezeichnete Winkel zwischen den Dipolen und der Verbindungslinie hat den Wert  $\alpha = \arcsin(\sqrt{1/3}) \approx 35,26^\circ$  [10]. Diese Konfiguration verhält sich dynamisch wie das triviale Kontinuum, wobei der Drehsinn der beiden Dipole analog zu zwei ineinander greifenden Zahnrädern ist: Wird ein Dipol gedreht, rotiert der andere im entgegengesetzten Sinn mit. Diese Anordnung ist neben der trivialen Konfiguration die einzige Goldstone-Mode mit parallelen Rotationsachsen. Für die oben erwähnte einparametrische Familie rastmomenten-

tenfreier Kupplungen ist jeder Winkel zwischen den beiden Rotationsachsen realisierbar, für den gilt:  $\cos \theta \cos \varphi - 2 \sin \theta \sin \varphi = 1$ . Die Winkel  $\theta$  und  $\varphi$  sind die Winkel zwischen der jeweiligen Rotationsachse und der Verbindungslinie der beiden Dipole [10].

Wollen wir kontinuierliche Systeme mit mehr als zwei Dipolen konstruieren, besteht die Schwierigkeit darin, dass die Anwesenheit von weiteren Dipolen die paarweisen Kontinua meist zerstört. Daher bieten sich im einfachsten Fall Kombinationen von Dipolen mit jeweils paarweise kontinuierlichem Zustand an. Damit lässt sich das Getriebe eines kleinen Magnet-Mobils (kurz „MagMob“) realisieren (Abb. 6a). Die Konstruktion funktioniert nur, wenn das gleichschenklige Dreieck den Winkel  $2\alpha$  einschließt. In jedem anderen Fall wäre die Kupplung nicht „glatt“, und es ergäben sich unerwünschte Rastmomente. Zwischen dem Antriebsmagneten in der Mitte und den Radmagneten besteht ein nichttriviales Kontinuum; dagegen erinnern die beiden Radmagnete an das triviale Kontinuum. Das Paar aus Radmagneten befindet sich jedoch nicht im Grundzustand – dafür müssten die Magnete antiparallel ausgerichtet sein – sondern durch die parallele Ausrichtung im Zustand maximaler magnetischer Energie, also in einem vollkommen instabilen Zustand. Das Gesamtsystem mit parallelen Raddipolmomenten ist dennoch stabil, wenn man die Stärke des



**Abb. 6** Eine nichttriviale rastmomentenfreie Kupplung aus drei Dipolen könnte ein Auto antreiben (a). Dazu muss für den Winkel zwischen den Antriebsmagneten gelten:  $2\alpha \approx 70,52^\circ$ . Außerdem muss der Antriebsmagnet stärker als die beiden Radmagnete sein. Daher ist er etwas größer dargestellt (b).

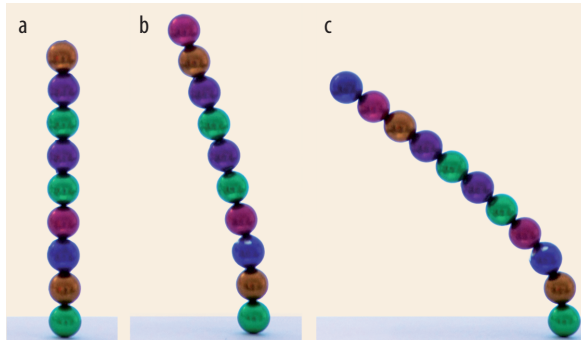


Abb. 7 Stapelt man die Magnetkugeln übereinander, ist der Gleichgewichtszustand bis zu einer bestimmten Kugelanzahl ein vertikaler Turm (a). Abhängig von der Stärke des Dipolmoments neigt sich der Turm bei weiter wachsender Kugelanzahl immer stärker zur Seite (b, c).

Antriebsmagneten (also sein Dipolmoment) genügend erhöht. Werden die Raddipolmomente als gleich angenommen, liefert eine Stabilitätsanalyse ein kritisches Verhältnis von Antriebsdipolmoment zu einem der Raddipolmomente von  $3\sqrt{3/4} \approx 1,299$ . Oberhalb dieses Wertes ist der gezeigte Zustand stabil. Unterhalb dieses kritischen Wertes ergibt sich interessanterweise immer noch ein kontinuierlicher Zustand – und somit eine rastmomentenfreie Kupplung. Allerdings sind die Radmagnete dann nicht mehr parallel zueinander, ihre Rotationsachsen jedoch weiterhin koaxial [10].

Ein „MagMob“ in PKW-Größe ist sicherlich nicht die beste Anwendung für diese Art von magnetischer Kupplung, weil es zu starke Magnete benötigt: Für ein reales Auto mit einem typischen Drehmoment von 100 Nm hätten die Magnetkugeln einen Durchmesser von etwa 40 cm. Aufgrund der Anfangsgedanken zu Verletzungen möchten wir mit diesen Magneten nicht hantieren. Bei miniaturisierten Apparaturen wie in der Mikrofluidik könnten solche magnetischen Kupplungen in Pumpen, Ventilen oder Mixern aber zum Einsatz kommen. Noch kleinere Anwendungen ergeben sich in der Nanotechnologie [11], wo sogar elektrische Dipole auf molekularer Ebene denkbar wären. Die Funktion der beschriebenen Systeme hängt nicht davon ab, dass es sich um magnetische Dipole handelt – sie funktionieren genauso für elektrische Dipole.

### „Elastische“ Deformationen und Dynamik

Die Wechselwirkung magnetischer Kugeln verleiht den Clustern auch elastische Eigenschaften. So reagiert eine lineare Kette von Kugeln auf eine mechanische

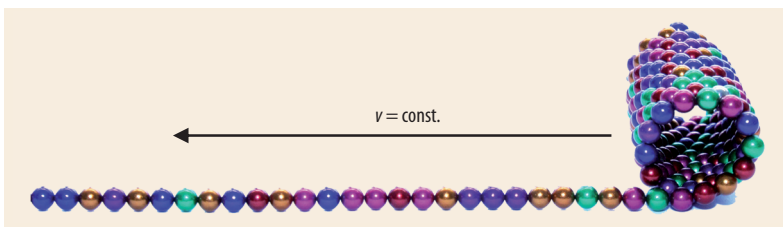


Abb. 8 Aus einer langen Kette von Magnetkugeln rollt sich nach leichtem Anstoßen spontan ein helikaler Zylinder mit konstanter Geschwindigkeit auf.

Beanspruchung wie ein elastischer Stab: Verbiegt man die Kette, gibt es aufgrund der Dipol-Dipol-Wechselwirkungen rücktreibende Kräfte, welche die Kette wieder gerade biegen möchten (Abb. 7). Man kann eine effektive magnetische Biegesteifigkeit einführen und erhält ein kollektives elastisches Verhalten von wechselwirkenden Dipolen in der Kette [12].

Als einfachstes Beispiel betrachten wir den Einfluss der Schwerkraft auf eine vertikale Kette von Dipolkugeln (Abb. 7a): Unter welchen Bedingungen verbiegt sich der „Stab“ analog zum Knicklastproblem (Abb. 7b, c)? Die Antwort beginnt mit zwei aufeinanderstehenden Kugeln, beide Dipolmomente zeigen vertikal nach oben. Bei perfekter Haftreibung (also ohne Rutschen) lässt die Schwerkraft die obere Kugel auf der unteren abrollen, während die rücktreibende magnetische Kraft die Kugel in ihrer Ausgangsposition zu halten tendiert. Die Stabilität eines solchen Kugelturms lässt sich abschätzen [12].

Kugeltürme sind elastisch: Lenkt man den Stab nach einer Seite aus, führt dies zu Schwingungen um seine Gleichgewichtslage. Aus der Frequenz der Fundamentalschwingung lässt sich die Stabilität der Anordnung bestimmen: Geht die Frequenz gegen Null, wird die vertikale Anordnung instabil. Auch andere Anordnungen lassen sich so auf ihre Stabilität testen: Ein Kugelring führt bei Deformation ebenfalls Schwingungen um seine Gleichgewichtslage aus [12].

Ein kuriose Beispiel zur Dynamik zeigt, dass sich eine lange lineare Kette spontan zu einem helikalen Zylinder aufrollt (Abb. 8). Ein solcher Zylinder ist energetisch günstiger als die Kette, sodass die Anordnung an Energie gewinnt, wenn sich der Zylinder auf Kosten der Kette vergrößert. Bei großen Teilchenzahlen hängt die magnetische Energie pro Kugel nicht mehr stark von der exakten Kugelanzahl ab (Abb. 2). Das gleiche gilt auch für den Zylinder: Sind erst einmal genügend Lagen vorhanden, bleibt der Energiegewinn pro Teilchen beim Aufrollen immer etwa gleich. Als Resultat rollt der Zylinder mit einer konstanten Geschwindigkeit (eventuell nach einem Schubs zum Start) entlang der Kette von rechts nach links – eine spielerische Demonstration magnetisch gesteuerter Selbstmontage.

### Vom Spiel zur Anwendung

In diesem Artikel haben wir die spielerischen Aspekte der Neodym-Kugeln stark in den Vordergrund gestellt, weil dieses einfach verfügbare Material einen sehr bequemen experimentellen Zugang zur Vielteilchenwechselwirkung im Allgemeinen und zur fundamental wichtigen Dipol-Dipol-Wechselwirkung im Speziellen liefert. Über diesen didaktischen Zweck hinaus stellen die hier diskutierten magnetischen Kupplungen ein noch weitgehend unbearbeitetes Feld technischer Anwendungsmöglichkeiten dar, dessen größtes Potenzial wohl im Bereich miniaturisierter Maschinen und dort beispielsweise in der Mikrofluidik liegt. Zwar gibt es bereits heute (triviale) magnetische Kupplungen auch

auf der eher makroskopischen Skala von Küchenmaschinen, wobei aber eine Weiterentwicklung hin zum nichttrivial gekoppelten Milchaufschäumer seine Liebhaber wohl am ehesten aufgrund der mathematischen Schönheit des zugrunde liegenden Antriebs finden würde.

\*

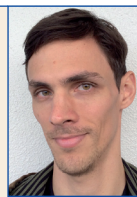
Wir bedanken uns bei Klaus Oetter, Stephan Meßlinger und Simeon Völkel, die uns bei der Erstellung von Grafiken und Fotos unterstützt haben.

### Literatur

- [1] *N. Vandewalle* und *S. Dorbole*, *New J. Phys.* **16**, 013050 (2014)
- [2] *J. Schönke*, *T. M. Schneider* und *I. Rehberg*, *Phys. Rev. B* **91**, 020410 (2015)
- [3] *R. Messina* et al., *Phys. Rev. E* **89**, 011202 (2014)
- [4] *R. Messina* und *I. Stankovic*, *EPL* **110**, 46003 (2015)
- [5] *S. M. Taheri* et al., *PNAS* **112**, 14484 (2015)
- [6] *R. Messina* und *I. Stankovic*, *Phys. Rev. E* **91**, 057202 (2015)
- [7] *T. Friedrich*, *I. Rehberg* und *R. Richter*, *Phys. Rev. E* **91**, 057201 (2015)
- [8] *J. D. Jackson*, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York (1998)
- [9] *T. A. Prokopenko* et al., *Phys. Rev. E* **80**, 031404 (2009)
- [10] *J. Schönke*, *Phys. Rev. Appl.* **4**, 064007 (2015)
- [11] *M. Peplow*, *Nature* **525**, 18 (2015)
- [12] *D. Vella* et al., *Proc. R. Soc. A* **470**, 20130609 (2014)

### DIE AUTOREN

**Johannes Schönke** studierte Physik und Astronomie in Jena und promovierte an der Uni Heidelberg. Sein Interesse umfasst die Theoretische Mechanik der Kontinua sowie die Dynamik komplexer Systeme. Zurzeit arbeitet er am Okinawa Institute of Science and Technology in Japan. Neben der Wissenschaft beschäftigt er sich mit unterschiedlichsten Arten von Musik.



**Wolfgang Schöpf** (FV Dynamik und Statistische Physik, Didaktik der Physik) studierte Physik und promovierte in Bayreuth. Nach Stationen in Perth und Townsville (Australien), Maskat im Oman und München beschäftigt er sich an der Uni Bayreuth mit der Physik von Flüssigkristallen. In seiner Freizeit fährt er Rennrad.

**Ingo Rehberg** (FV Dynamik und Statische Physik) war einige Jahre Mitglied im Vorstandsrat der DPG und erhielt 1998 den Leibniz-Preis der DFG. Er studierte Physik in Kiel. Als Lehrstuhlinhaber für Experimentalphysik an der Uni Bayreuth beschäftigt er sich mit der Dynamik komplexer Fluide. Sein Interesse für die Dipol-Dipol-Wechselwirkung speist sich aus den magnetischen Suspensionen. In seiner Freizeit frönt er dem Ausdauersport.

